ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, 13/9/2017, διδάσκων Α. Τόλιας

Θέμα 1. [3μ]
(i) Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a_n \to x$ και $a_n \to y$ να δείξετε ότι $x = y$.

(ii) Αν $-1 < \theta < 1$ δείξτε ότι $\theta^n \to 0$.

(iii) Δείξτε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

(iv) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες να βρείτε το όριό της (αν υπάρχει) ή να δείξετε ότι δεν έχει όριο. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται πλήρης δικαιολόγηση.

$$a_n = \sqrt[n]{3n^2 + 5n + 12} \qquad \beta_n = \sin(n\frac{\pi}{2}) + \cos(n\frac{\pi}{2}) \qquad \gamma_n = \frac{3^n + n^2}{2^n + 3^n + n}.$$

Θέμα 2. [2μ]
(i) Να διατυπώσετε (χωρίς να αποδείξετε) την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών και στη συνέχεια να τη χρησιμοποιήσετε για να βρείτε το infimum του συνόλου $A = \{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Έστω $A \subseteq (-\infty, 0)$ και $B \subseteq (0, +\infty)$, ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχουν $x \in A$ και $y \in B$ με $y - x < \varepsilon$. Να βρείτε το supremum του A και το infimum του B (δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας).

Θέμα 3. [1,5μ]
Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $|f'(x)| \leq \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. [Υπόδειξη: Να δείξετε αρχικά ότι $|f(x) - f(0)| \leq x\sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$ (χρησιμοποιήστε το θεώρημα Μέσης Τιμής).]

Θέμα 4. [1,5 μ]
Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

Θέμα 5. [1,5 μ]
Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε $g(0) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(α) Να δείξετε ότι η g λαμβάνει μέγιστη τιμή (δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [0, +\infty)$ ώστε $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

(β) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι με αυτές τις υποθέσεις δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η g λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Θέμα 6. [2μ]
(i) Να δοθεί παράδειγμα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η f να μην είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. (Αφού ορίσετε μια τέτοια f να αποδείξετε ότι έχει τις παραπάνω ιδιότητες). Στη συνέχεια να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη αλλά όχι τρεις φορές παραγωγίσιμη.

(ii) Δώστε παράδειγμα δυο ακολουθιών θετικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $a_n \to 0$ και $\beta_n \to 0$, και η ακολουθία $\left(\frac{a_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι φραγμένη και να μη συγκλίνει σε κανένα πραγματικό αριθμό.

Καλή Επιτυχία!